

LISTA DE EXERCÍCIOS - TEORIA DOS NÚMEROS - MATEMÁTICA

1 Polinômios

Exercício 1.1. *Demonstre o algoritmo da divisão para polinômios.*

Exercício 1.2 (Teorema de Bachet-Bézout para polinômios). *Seja $d(x)$ o máximo divisor comum de dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$. Mostre que existem dois polinômios $m(x)$ e $n(x)$ tais que*

$$f(x)m(x) + g(x)n(x) = d(x).$$

Exercício 1.3. *Sejam K um corpo e $p(x), a_1(x), \dots, a_m(x) \in K[x]$ com $p(x)$ irredutível em $K[x]$. Se $p(x) | a_1(x) \cdot \dots \cdot a_m(x)$, então prove que $p(x) | a_i(x)$ para algum i .*

Exercício 1.4 (Fatoração Única). *Seja K um corpo. Motre que todo polinômio não nulo em $K[x]$ pode ser fatorado como um produto de polinômios irredutíveis em $K[x]$. Além disso, verifique que esta fatoração é única a menos da ordem dos fatores e multiplicação por constantes não nulas.*

Exercício 1.5. *Seja p um primo. Mostre que todo polinômio da forma*

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.